Enseignant: Philippe Michel
Examen: Algèbre Linéaire Avancée, MATH-110
Date: Le 16 Janvier 2023, 15h15-18h45
Durée: 3.5 heures

1

John Frusciante

SCIPER : **1001001** Signature :

Attendez le début de l'examen avant de tourner la page.

Ce document est imprimé recto-verso, il contient 40 pages.

Ne pas dégrafer.

- Aucun document n'est autorisé.
- Une calculette simple (sans display graphique) est autorisée.
- Pour les questions à choix multiples:
  - entourez la bonne réponse (sans justification) et utilisez un stylo à encre noire ou bleue foncée; en cas d'erreur effacez proprement avec du correcteur blanc.
  - Une réponse incorrecte compte 0 mais n'entraine pas de point négatif.
- Pour les questions ouvertes:
  - Répondre dans l'espace dédié.
  - Vous pouvez utiliser un crayon à papier à condition d'écrire lisiblement;
  - Si vous utilisez des résultats du cours, citez-les explicitement.
  - Sauf mention explicite du contraire, on a le droit d'utiliser un résultat d'un autre exercice ou d'une question précédente du même exercice pour répondre à une question même si on ne l'a pas démontré.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- L'examen est LONG mais il n'est pas nécessaire de le faire correctement intégralement pour obtenir la note maximale.

Formulaire concernant les déterminants

Soit K un corps de caractéristique $\neq 2$, $d \geqslant 1$, V un K-EV de dimension d et $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_d\}$ une base de V.
Pour $n \geqslant 1$, on note $\mathrm{Mult}^{(n)}(V;K)$ l'espace vectoriel des formes multilinéaires en n variables sur V à valeurs dans K. On note

$$\mathrm{Alt}^{(n)}(V;K) \subset \mathrm{Mult}^{(n)}(V;K)$$

le sous-espace vectoriel des formes multilinéaires en n variables qui sont *alternées*.
On rappelle que pour $n = d$ l'espace $\mathrm{Alt}^{(d)}(V;K)$ est de dimension 1 (ainsi toute forme multilinéaire alternée en d variables est proportionelle a toute autre forme multilinéaire alternée en d variables non-nulle). On note $\det_{\mathcal{B}}$ l'unique forme multilinéaire alternée telle que

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_d) = 1.$$

Soit $(v_1, \cdots, v_d) \in V^d$ et $v_i = \sum_{j=1}^d x_{ij}\mathbf{e}_j$. On a alors

$$\det_{\mathcal{B}}(v_1, \cdots, v_d) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \mathrm{sign}(\sigma) x_{1\sigma(1)}. \cdots .x_{d\sigma(d)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \mathrm{sign}(\sigma) x_{\sigma(1)1}. \cdots .x_{\sigma(d)d}$$

Pour $\varphi : V \mapsto V$ une application lineaire, on définit son déterminant $\det(\varphi) \in K$ comme l'unique scalaire vérifiant l'une des égalités équivalentes suivantes:

$$\det_{\mathscr{B}}(\varphi(\mathbf{e}_1), \cdots, \varphi(\mathbf{e}_d)) = \det(\varphi)\det_{\mathcal{B}}(\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_d) = \det(\varphi).$$

$$\forall (v_1, \cdots, v_d) \in V^d,\ \det_{\mathcal{B}}(\varphi(v_1), \cdots, \varphi(v_d)) = \det(\varphi)\det_{\mathcal{B}}(v_1, \cdots, v_d)$$

et si

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = (m_{ij})_{i,j \leqslant d} = M$$

est la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$, alors

$$\det(\varphi) = \det(M) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \mathrm{sign}(\sigma) m_{1\sigma(1)}. \cdots .m_{d\sigma(d)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \mathrm{sign}(\sigma) m_{\sigma(1)1}. \cdots .m_{\sigma(d)d}.$$

On a par ailleurs pour $\varphi, \psi \in \mathrm{End}(V)$ et $M, N \in M_d(K)$ et $\lambda \in K$

$$\det(\varphi \circ \psi) = \det(\varphi)\det(\psi),\ \det(M.N) = \det(M)\det(N)$$

$$\det(\lambda\varphi) = \lambda^d \det(\varphi),\ \det(\lambda.M) = \lambda^d \det(M)$$

$$\det(\mathrm{Id}_V) = 1 = \det(\mathrm{Id}_d)$$

Par ailleurs si $M \in M_d(K)$ se décompose en blocs de matrices carrées

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & * \\ \mathbf{0} & M_2 \end{pmatrix} \text{ ou bien } M = \begin{pmatrix} M_1 & \mathbf{0} \\ & M_2 \end{pmatrix},\ M_1 \in M_{d_1}(K),\ M_2 \in M_{d_2}(K),\ d = d_1 + d_2,$$

on a

$$\det(M) = \det(M_1)\det(M_2).$$

Exercice 1 (Questions de cours et QCM)**.** .

1. Donner une propriété (plusieurs sont possibles) qui détermine une forme multilinéaire **alternée** en n variables parmi les formes multilinéaires (on demande une propriété pour "alternée" pas pour "multilinéaire").

2. Soit G un groupe, $h, k \in G$ deux éléments et $G' = \{g \in G,\ g.h.g^{-1} = k\}$. Alors G' n'est pas toujours un sous-groupe de G.

   Vrai Faux

   (c'est un groupe ssi $h = k$)

3. Dans un anneau non-nul, intègre et fini, un élément non-nul est toujours inversible.

   Vrai Faux

4. Une application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ avec $m \leqslant n$ est toujours injective .

   Vrai Faux

5. Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ et $M \in M_3(\mathbb{R})$ vérifiant $B.{}^tM.B.M + B.M = B$; alors M est inversible.

   Vrai Faux

6. Soit K un corps et $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{pmatrix} \in M_3(K)$ alors C est inversible sauf en caractéristiques 2 et 3.

   Vrai Faux

Exercice 2. Soit K un corps et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & -5 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & -6 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in M_{4\times 5}(K).$$

1. Déterminer la valeur de $\operatorname{rang}(A)$ en fonction de la caractéristique de K.

2. On suppose que $\operatorname{car}(K) = 0$ et on voit A comme la matrice (dans les bases canoniques) d'une application linéaire de K^5 vers K^4. Donner une base de $\ker(A)$: on écrira les vecteurs de la base du noyau sous forme de vecteurs lignes.

3. Donner une représentation cartésienne de $\operatorname{Im} A$ avec un nombre minimum d'équations (repondre "$0 = 0$" si $\operatorname{Im} A = K^4$).

Réponses aux questions de l'Exercice 2 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 2 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 2 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 2 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 2 (répondre à l'intérieur de la boite)

Exercice 3. [Interpolation de Lagrange] Le problème l'interpolation de Lagrange est le suivant:

Etant donné $x_0, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$, $n+1$ nombres réels distincts, et $n+1$ valeurs $p_0, \cdots, p_n \in \mathbb{R}$ (pas forcement distinctes) peut-on trouver un polynôme $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall i = 0, \cdots, n, \;\; P(x_i) = p_i \;?$$

Pour résoudre cette question on considère l'espace

$$\mathbb{R}[X]_{\leqslant n} = \{a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n, \;\; a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

des polynômes de degré $\leqslant n$. C'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n+1$ dont une base est donnée par la famille des monômes unitaires de degré $\leqslant n$

$$\mathcal{M}_n := \{1 = X^0, X = X^1, \cdots, X^n\}.$$

1. Montrer que les deux points suivants sont équivalents

   (a) Pour tout $p_0, \cdots, p_n \in \mathbb{R}$ il existe un unique polynôme $P(X) \in \mathbb{R}[X]_{\leqslant n}$ tel que

   $$\forall i = 0, \cdots, n, \;\; P(x_i) = p_i.$$

   (b) $\det V(x_0, \cdots, x_n) \neq 0$ avec $V(x_0, \cdots, x_n) \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice dite "de Vandermonde"

   $$V(x_0, \cdots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}.$$

   pour cela on pourra considérer l'application linéaire d'évaluation en $\vec{x} = (x_0, \cdots, x_n)$

   $$\mathrm{ev}_{\vec{x}} : P(X) \in \mathbb{R}[X]_{\leqslant n} \mapsto (P(x_0), P(x_1), \cdots, P(x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1};$$

   on pourra montrer qu'elle est linéaire et calculer sa matrice $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{ev}_{\vec{x}})$ dans des bases convenables de $\mathbb{R}[X]_{\leqslant n}$ et de $\mathbb{R}^{n+1}$.

2. Pour calculer ce déterminant on introduit la famille suivante de polynômes (interpolateurs de Lagrange)

   $$\mathcal{L}_n := \{P_i(X), \;\; i = 0, \cdots, n\} \subset \mathbb{R}[X]_{\leqslant n}$$

   avec

   $$P_i(X) := \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (X - x_j).$$

   Montrer que la famille $\mathcal{L}_n$ est libre (on pourra évaluer une combinaison linéaire de ces polynômes en des points biens choisis de $\mathbb{R}$) et montrer que c'est une base de $\mathbb{R}[X]_{\leqslant n}$.

3. Montrer que la matrice de $\mathrm{ev}_{\vec{x}}$ relativement à $\mathcal{L}_n$ et à la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$ est diagonale et montrer qu'elle est inversible en calculant son déterminant.

4. Donner une relation entre cette matrice et la matrice de Vandermonde $V(x_0, \cdots, x_n)$ et montrer que

   $$\det(V(x_0, \cdots, x_n)) \neq 0.$$

Réponses aux questions de l'Exercice 3 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 3 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 3 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 3 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 3 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 3 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 3 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 3 (répondre à l'intérieur de la boite)

Exercice 4. Soit K un corps et

$$\mathrm{SL}_2(K) = \{M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(K),\ \det M = ad - bc = 1\} \subset \mathrm{GL}_2(K)$$

le groupe spécial linéaire des matrices 2×2 de déterminant 1. On rappelle que comme

$$\det : \mathrm{GL}_2(K) \mapsto K^\times$$

est un morphisme de groupes et $SL_2(K)$ est un sous-groupe distingué. On va étudier le structure de ce groupe.
Pour cela on a recours aux matrices de transformations élémentaires: pour $i \neq j \in \{1, 2\}$ et $\mu \in K^\times$, on pose

$$C_{ij,\mu} = \mathrm{Id}_2 + \mu.E_{ij} \tag{4.1}$$

où $E_{i'j'},\ i', j' \in \{1, 2\}$ désignent les matrices élémentaires et Id_2 est la matrice identité.

1. Montrer que les $C_{ij,\mu},\ i \neq j \in \{1, 2\}$ appartiennent a $\mathrm{SL}_2(K)$ et calculer leur inverse.

2. Soit $M \in M_2(K)$ une matrice. Rappelez (sans preuve) a quelle opération sur M correspond la multiplication a gauche $M \mapsto C_{ij,\mu}.M$ pour $i \neq j$?

3. On va montrer que quand $i \neq j$ parcourent $\{1, 2\}$ et μ parcourt $K^\times$ les matrices $C_{ij,\mu}$ engendrent $\mathrm{SL}_2(K)$. Soit
$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(K).$$
On veut donc montrer que M peut s'écrire comme un produit de matrices de la forme (4.1) (pour $i \neq j$). Montrer que quitte à remplacer M par sa multipliée à gauche par une (des) matrice(s) $C_{ij,\mu}$ convenable (ou par la matrice identité), on peut supposer succéssivement que

   (a) $c \neq 0$,

   (b) puis que $a = 1$,

   (c) et enfin que $M = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et conclure.

   Ainsi vous avez montré que $\mathrm{SL}_2(K)$ est engendré par les matrices de la forme (4.1).

4. Soient A et B deux matrices inversibles, leur <u>commutateur</u> est défini comme étant la matrice
$$[A, B] := A.B.A^{-1}.B^{-1}.$$
Soit $\alpha, \mu \in K^\times$. Calculer le commutateur
$$[\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}] \in \mathrm{SL}_2(K)$$

5. On suppose que $K^\times$ possède *au moins* 3 éléments. Montrer qu'alors toute matrice $C_{ij,\mu}$ $(i \neq j)$ est le commutateur de deux matrices de $\mathrm{SL}_2(K)$.

6. Montrer que $\mathrm{SL}_2(K)$ est engendré par l'ensemble des commutateurs de ses éléments,
$$\mathrm{SL}_2(K) = \langle [A, B],\ A, B \in \mathrm{SL}_2(K) \rangle =: [\mathrm{SL}_2(K), \mathrm{SL}_2(K)].$$
On dit que $\mathrm{SL}_2(K)$ est un groupe <u>parfait</u>.

Remarque. On peut montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2)$ et $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ ne sont pas parfaits. En revanche si $d \geqslant 3$, on peut montrer que $\mathrm{SL}_d(K)$ est toujours parfait quelquesoit la taille de K.

Réponses aux questions de l'Exercice 4 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 4 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 4 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 4 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 4 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 4 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 4 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 4 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 4 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 4 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 4 (répondre à l'intérieur de la boite)

Exercice 5. Soit K un corps de caractéristique <u>zero</u>.
Pour $n \geqslant 2$, on note $\mathrm{Mult}^{(n)}(V;K)$ l'espace vectoriel des formes multilinéaires en n variables sur V à valeurs dans K. On note

$$\mathrm{Alt}^{(n)}(V;K) \subset \mathrm{Mult}^{(n)}(V;K)$$

le sous-espace vectoriel des formes multilinéaires en n variables qui sont *alternées*. On va montrer que le résultat énoncé en cours: si $n \leqslant d$ alors

$$\dim_K(\mathrm{Alt}^{(n)}(V;K)) = C_d^n = \frac{d!}{n!(d-n)!}$$

(ie. le coefficient du binôme ou ce qui sera plus intéressant pour nous, le nombre de sous-ensembles de cardinal n dans un ensemble de cardinal d). Ici $n! = 1.2.\cdots.n$ est la factorielle usuelle.
On fixe $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_d\}$ une base de V et on note

$$\mathscr{B}^* = \{\mathbf{e}_1^*, \cdots, \mathbf{e}_d^*\} \subset V^*$$

la base duale de l'espace des formes linéaires: on rappelle que $\mathbf{e}_i^*$ est définie par ses valeurs sur la base $\mathscr{B}$ par

$$\mathbf{e}_i^*(\mathbf{e}_j) = \delta_{i=j}.$$

Etant donné $j_1, \cdots, j_n \in \{1, \cdots, d\}$, n entiers compris entre 1 et d, on notera

$$\vec{j} = (j_1, \cdots, j_n) \in \{1, \cdots, d\}^n$$

le n-uplet (ordonné) correspondant. Pour $\vec{j}$ comme ci-dessus, on notera

$$\mathbf{e}_{\vec{j}}^* = \mathbf{e}_{j_1}^* \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{j_n}^* \in \mathrm{Mult}^{(n)}(V;K)^*$$

la forme multilinéaire définie par

$$\mathbf{e}_{\vec{j}}^* : (v_1, \cdots, v_n) \in V^n \mapsto \mathbf{e}_{j_1}^*(v_1).\mathbf{e}_{j_2}^*(v_2).\cdots.\mathbf{e}_{j_n}^*(v_n) \in K.$$

On rappelle également qu'on a une action du groupe symétrique à n éléments sur l'espace des formes multilinéaires $\mathfrak{S}_n \curvearrowright \mathrm{Mult}^{(n)}(V;K)$, par permutation des variables: pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $\Lambda \in \mathrm{Mult}^{(n)}(V;K)$ on définit $\sigma.\Lambda$ par

$$\sigma.\Lambda(v_1, \cdots, v_n) = \Lambda(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(n)})$$

($\sigma.\bullet$ est un automorphisme linéaire de $\mathrm{Mult}^{(n)}$).
On en déduit une application linéaire de symétrisation

$$\bullet_{\mathrm{sign}} : \Lambda \in \mathrm{Mult}^{(n)}(V;K) \mapsto \Lambda_{\mathrm{sign}} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sign}(\sigma)\sigma.\Lambda \in \mathrm{Alt}^{(n)}(V;K)$$

qui transforme un forme multilinéaire en une forme alternée (comme d'habitude $\mathrm{sign}(\sigma)$ désigne la signature de la permutation σ).

1. (Question de cours) Donner (sans preuve) une base ainsi que la dimension de l'espace $\mathrm{Mult}^{(n)}(V;K)$.

2. Montrer que pour $\tau \in \mathfrak{S}_n$ et $\Lambda \in \mathrm{Mult}^{(n)}(V;K)$ on a

$$(\tau.\Lambda)_{\mathrm{sign}} = \mathrm{sign}(\tau)\Lambda_{\mathrm{sign}}$$

3. Montrer que si Λ est une forme alternée alors

$$\Lambda_{\mathrm{sign}} = n!\Lambda$$

et en déduire que l'application linéaire $\bullet_{\mathrm{sign}}$ a pour image exactement

$$\mathrm{Im}(\bullet_{\mathrm{sign}}) = \mathrm{Alt}^{(n)}(V;K).$$

4. En déduire que la famille de formes multilinéaires alternées
$$\{(\mathbf{e}^*_{\vec{j}})_{\mathrm{sign}},\ \vec{j} \in \{1, \cdots, d\}^n\} \subset \mathrm{Alt}^{(n)}(V; K)$$
est une famille géneratrice de $\mathrm{Alt}^{(n)}(V; K)$.

5. Soit $\vec{j} = (j_1, \cdots, j_n) \in \{1, \cdots, d\}^n$ et $\tau \in \mathfrak{S}_n$, montrer que
$$\tau.\mathbf{e}^*_{\vec{j}} = \mathbf{e}^*_{j_{\tau^{-1}(1)}} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}^*_{j_{\tau^{-1}(n)}}.$$

6. En déduire que si $\vec{j} = (j_1, \cdots, j_n)$ possède deux indices égaux (il existe $i \neq i'$ tel que $j_i = j_{i'}$) alors
$$(\mathbf{e}^*_{\vec{j}})_{\mathrm{sign}} = 0;$$
pour fixer les idées on pourra traiter uniquement le cas $j_1 = j_2$ et utiliser les questions 2 et 5 avec un τ convenable.

7. Soit $\vec{j} = (j_1, \cdots, j_n)$ avec les j_i tous *distincts*. Montrer que
$$(\mathbf{e}^*_{\vec{j}})_{\mathrm{sign}} \neq 0$$
(on pourra utiliser la Question 1).

8. Montrer que la famille de formes alternées associée au n-uplets distincts et ordonnés
$$\{(\mathbf{e}^*_{\vec{j}})_{\mathrm{sign}},\ \vec{j} = (j_1, \cdots, j_n),\ 1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_n \leqslant d\} \subset \mathrm{Alt}^{(n)}(V; K)$$
est base de $\mathrm{Alt}^{(n)}(V; K)$. On remarquera pour cela que si $\vec{j}' = (j'_1, \cdots, j'_n)$ est obtenu à partir d'un tel uplet $\vec{j}$ par permutation des coordonnees (ie. il existe $\tau \in \mathfrak{S}_n$ telle que $j'_i = j_{\tau(i)}$) alors
$$(\mathbf{e}^*_{\vec{j}'})_{\mathrm{sign}} = \pm(\mathbf{e}^*_{\vec{j}})_{\mathrm{sign}}.$$

Réponses aux questions de l'Exercice 5 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 5 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 5 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 5 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 5 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 5 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 5 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 5 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 5 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 5 (répondre à l'intérieur de la boite)